小球在圆弧形滑块上运动的力学问题研究

何述平
（西北师范大学教育学院物理教育研究所　甘肃 兰州　730070）

（收稿日期：2013-11-07）

摘　要：探究了一个小球在圆弧形滑块上运动的力学问题，给出了细致的推证，结果表明：物体的速度、位移、加速度、作用力均随位置角参量 θ 变化，一对内力分别做了功，但做的总功等于零的特点；并进行了必要的教学讨论.

关键词：力学问题　特点　教学研究　方法

1　引言

一个典型力学问题如下：如图 1，质量为 M，具有半径为 R 的圆弧形面的物块位于光滑水平面上，质量为 m 的小球自光滑圆弧面顶端滑下，最初物块和小球都处于静止状态. 求小球脱离物块时小球和物块的速度[1,2]. 其解答为：水平面为参照系，m 脱离 M 时的速度方向均沿水平方向，由质点系的动量守恒和机械能守恒求得速度大小[1].

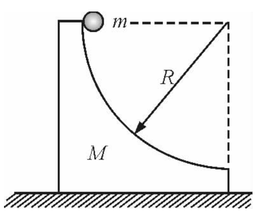

图 1

然而，m 和 M 分别相对于水平面做何种运动？速度如何？位移如何？作用力怎样？功－能又怎样？似乎避而不谈，以致不甚明确；再者，解决此问题的物理学方法论有何特色？中学物理可合理解决到什么程度？

本文就此进行相应的探究，以期获得较完备的解答，并为此问题的开放式教学奠定坚实的物理理论基础.

2　探究

为了更加明晰起见，探究不局限于此题设问题，以获得此问题的尽可能完备的信息.

以水平面为参照系（惯性系），分别以小球、物块为研究对象，受力如图 2 所示.

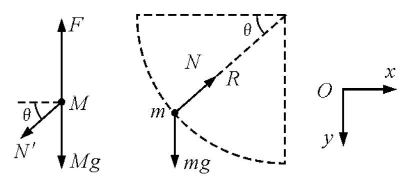

图 2

在水平面沿水平 x 方向、竖直 y 方向建立坐标系 O-xy. 依据牛顿第二定律，分别对 m 和 M 有

$$N\cos\theta = ma_{mx} \tag{1}$$

$$mg - N\sin\theta = ma_{my} \tag{2}$$

$$-N'\cos\theta = -Ma_{Mx} \tag{3}$$

$$Mg + N'\sin\theta - F = 0 \tag{4}$$

依据牛顿第三定律有（大小关系）

$$N' = N \tag{5}$$

由式（1）～（5）知，m 和 M 分别相对水平面可能做非匀变速直线运动（x，y 方向）.

作者简介：何述平（1964-　），男，硕士，副教授，主要从事物理教学论的理论和实验的教学与研究工作.

2.1　速度特点

设 u 为 m 相对 M 的速度大小(方向沿圆弧切向),v_m 与 v_M 分别为 m 与 M 相对水平面的速度大小;则有

$$u=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

$$v_{mx}=u\sin\theta-v_{Mx} \tag{7}$$

$$v_{my}=u\cos\theta \tag{8}$$

由式(1)、(3)和(5)得

$$a_{mx}=\frac{M}{m}a_{Mx} \tag{9}$$

式(9)对时间 $0\sim t$ 积分,得

$$v_{mx}=\frac{M}{m}v_{Mx} \tag{10}$$

式(10)也可直接由质点系$(m+M)$的水平方向动量守恒推得.由式(7)、(10)得

$$v_{mx}=\frac{M}{M+m}u\sin\theta \tag{11}$$

$$v_{Mx}=\frac{m}{M+m}u\sin\theta \tag{12}$$

由式(7)、(8)和图 2 可知,m 相对 M 的元位移 $u\mathrm{d}t$ 与 m 受 M 的弹性力 N 正交;依据质点系一对内力做功的特点 —— 一对内力做的总功仅决定于相互作用力和相对位移[3],可定性推知,一对弹性内力 N 和 N' 做的总功等于零;则质点系$(m+M+$地球$)$的机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}mv_m^2+\frac{1}{2}Mv_M^2=mgR\sin\theta \tag{13}$$

由式(11)、(8)、(12)、(13)得

$$u=\sqrt{\frac{2(M+m)gR\sin\theta}{M+m\cos^2\theta}} \tag{14}$$

将式(14)分别代入(8)、(11)、(12)得

$$v_{mx}=\sqrt{\frac{2M^2gR\sin^3\theta}{(M+m)(M+m\cos^2\theta)}} \tag{15}$$

$$v_{my}=\sqrt{\frac{2(M+m)gR\sin\theta\cos^2\theta}{M+m\cos^2\theta}} \tag{16}$$

$$v_{Mx}=\sqrt{\frac{2m^2gR\sin^3\theta}{(M+m)(M+m\cos^2\theta)}} \tag{17}$$

式(14)、(15)、(16)、(17)表明,u,v_{mx},v_{my},v_{Mx} 均是位置角参量 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的函数,即随 θ 的变化而变化;特别当 m 脱离 M 时,有

$$u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{2(M+m)gR}{M}} \tag{18}$$

$$v_{mx}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} \tag{19}$$

$$v_{my}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0 \tag{20}$$

$$v_{Mx}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{2m^2gR}{M(M+m)}} \tag{21}$$

式(19)、(21)同运用质点系的动量守恒和机械能守恒推得的结果[1].

由式(14)、(15)、(16)、(17)通过数学可严格推证(由相应速度对位置角的一阶导数等于零,得合理的极值位置角;再由二阶导数的极值位置角的值小于零和位置角的变化范围,可推知此位置角对应最大值):$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,u,v_{mx},v_{Mx} 均取最大值;而当 $\theta=\arccos\left[\sqrt{(1.5k)^2+2k}-1.5k\right]^{\frac{1}{2}}$ 时,v_{my} 取最大值$\left(其中 k=\frac{M}{m}\right)$.

由式(6)、(14)得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2g}{R}\frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\cos^2\theta}} \tag{22}$$

式(22)表明,不仅 θ 是 t 的函数,而且$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$随 θ 的变化而变化.因此,由式(14)、(22)知,m 相对 M 做变速圆周运动;由式(15)、(16)、(17)、(22)知,m 和 M 分别相对水平面做非匀变速直线运动(x 和 y 方向).

2.2　位移特点

m 相对水平面的水平元位移大小为

$$\mathrm{d}x_m=v_{mx}\mathrm{d}t=v_{mx}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta \tag{23}$$

由式(6)、(11)、(23)得

$$\mathrm{d}x_m=\frac{MR\sin\theta}{M+m}\mathrm{d}\theta \tag{24}$$

同理,由式(6)、(8)、(12)得

$$\mathrm{d}y_m=R\cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{25}$$

$$\mathrm{d}x_M=\frac{mR\sin\theta}{M+m}\mathrm{d}\theta \tag{26}$$

式(24)、(25)、(26)分别对 $0\sim\theta$ 积分,得

$$x_m=\frac{MR}{M+m}(1-\cos\theta) \tag{27}$$

$$y_m=R\sin\theta \tag{28}$$

$$x_M = \frac{mR}{M+m}(1-\cos\theta) \tag{29}$$

式(27)、(28)、(29) 表明,x_m,y_m,x_M 均随θ变化;特别有

$$x_m \big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{MR}{M+m} \tag{30}$$

$$y_m \big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = R \tag{31}$$

$$x_M \big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{mR}{M+m} \tag{32}$$

由式(27)、(28)、(29) 和 θ 的变化范围可直接知,$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,x_m,y_m,x_M 均取最大值.

2.3　加速度特点

式(14)、(15)、(16)、(17) 分别对 t 求导,再结合式(22) 得

$$\frac{du}{dt} = \frac{(M+m)\cos\theta}{M+m\cos^2\theta}\left(1+\frac{2m\sin^2\theta}{M+m\cos^2\theta}\right)g \tag{33}$$

$$a_{mx} = \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\cos^2\theta}\left(1+\frac{2(M+m)}{M+m\cos^2\theta}\right)g \tag{34}$$

$$a_{my} = \frac{(M+m)(m\cos^4\theta+3M\cos^2\theta-2M)}{(M+m\cos^2\theta)^2}g \tag{35}$$

$$a_{Mx} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\cos^2\theta}\left(1+\frac{2(M+m)}{M+m\cos^2\theta}\right)g \tag{36}$$

式(33)、(34)、(35)、(36) 表明,$\frac{du}{dt}$(相对切向加速度),a_{mx},a_{my},a_{Mx} 均随θ 变化;再联系式(22) 知,不仅 m 相对M 做变速圆周运动,而且 m,M 分别相对水平面做非匀变速直线运动(x,y 方向);特别有

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{\theta=0} = g \qquad \left.\frac{du}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{37}$$

$$a_{mx}\big|_{\theta=0} = 0 \qquad a_{mx}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{38}$$

$$a_{my}\big|_{\theta=0} = g \qquad a_{my}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -2\left(1+\frac{m}{M}\right)g \tag{39}$$

$$a_{Mx}\big|_{\theta=0} = 0 \qquad a_{Mx}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{40}$$

由式(33)、(34)、(35)、(36) 通过数学可严格推证(由相应加速度对位置角的一阶导数等于零,得合理的极值位置角;再由二阶导数的极值位置角的值小于零和位置角的变化范围,可推知此位置角对应最大值). 当 $k<5$,

$$\theta = \arccos\left[3(1+k)-\sqrt{8(1+k)^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

时,$\frac{du}{dt}$ 取最大值;

当 $k>5$,$\theta=0$ 时,$\frac{du}{dt}$ 取最大值;

$$\theta = \arccos\left[\frac{3(1+k)^2-k-(1+k)\sqrt{9(1+k)^2-12k}}{3+2k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

时,a_{mx},a_{Mx} 取最大值;$\theta=0$ 和$\frac{\pi}{2}$ 时,a_{my} 分别取最大值和最小值;

$\theta = \arccos\left[\sqrt{(1.5k)^2+2k}-1.5k\right]^{\frac{1}{2}}$ 时,a_{my} 取零值$\left(其中\ k=\frac{M}{m}\right)$.

2.4　作用力特点

由式(1)、(4)、(5) 及式(34) 得

$$N = \frac{Mm\sin\theta}{M+m\cos^2\theta}\left(1+\frac{2(M+m)}{M+m\cos^2\theta}\right)g \tag{41}$$

$$F = \frac{M(M+m)}{M+m\cos^2\theta}\left(1+\frac{2m\sin^2\theta}{M+m\cos^2\theta}\right)g \tag{42}$$

式(41)、(42) 表明,N,F 均随θ 变化;因而再次说明 m,M 分别相对水平面做非匀变速直线运动(x,y 方向);特别有

$$N\big|_{\theta=0} = 0 \qquad N\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = m\left(3+\frac{2m}{M}\right)g \tag{43}$$

$$F\big|_{\theta=0} = Mg \quad F\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (M+m)\left(1+\frac{2m}{M}\right)g \tag{44}$$

由式(41)、(42) 通过数学可严格推证(由相应作用力对位置角的一阶导数等于零,得合理的极值位置角;再由二阶导数的极值位置角的值小于零和位置角的变化范围,可推知此位置角对应最大值):

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,N,F 均取最大值.

2.5　功 -能特点

由式(24)、(25)、(26) 及式(41)、(5) 推得,质点系($m+M$)的一对弹性内力 N 和 N' 的元功和等于零,即

$$N\cos\theta dx_m - N\sin\theta dy_m + N'\cos\theta dx_M = 0 \tag{45}$$

由式(45) 知,虽然一对弹性内力 N 和 N' 做的总功等于零,但却做了功,其效果仅使质点系($m+M+$地球) 的机械能转化(m 的重力势能转化为竖直方向m 的动能和水平方向 m,M 的动能),从而使质点系的机械能守恒[式(45) 是一对弹性内力 N 和 N' 做的总功等于零的定量推证].

3　讨论

3.1　方法

上述探究借鉴了相似力学问题的解法[4]，概括上述探究运用的物理学方法，主要有隔离法、理想模型法、运动分解法、相对运动法、系统法、微分法、积分法(数学方法).

从上述速度特点的探究中可明显看出，涉及运动分解法、相对运动法、系统法，并以系统法(仅考虑动量、能量，表现为简捷性)为主；因不细致考虑质点系的弹力内力，从而运用系统法无法确定弹力内力. 从上述作用力特点的探究中可明显看到，涉及隔离法、理想模型法、运动分解法，并以隔离法(考虑作用力、加速度，表现为精细性)为主；因细致考虑各质点的各作用力，从而运用隔离法精细确定各作用力.

3.2　教学

就大学普通物理而言，不应仅仅满足于此典型力学问题的解决，而应尽可能达到全面、深入的认识，更应从物理学方法论方面提升.

或许，从大学普通物理居高临下地审视中学基础物理，可使物理问题的认识更深、更广. 若从中学基础物理层次仅仅求此典型力学问题的水平位移大小[5]，则目前基本无能为力. 因为质点间的相互作用力是变力，两质点分别相对水平面沿水平方向做初速为零的非匀变速直线运动，要求水平位移大小，就不得不涉及微积分；而中学基础物理目前不涉及微积分，这就使得从中学基础物理层次合理求此问题的水平位移大小成为不可能. 然而，就中学基础物理而言，可有理有据地解决此问题中的速度问题；可理解、可操作的推理有式(7)、(8)、(10)、(11)、(12)、(13)以及式(14)、(15)、(16)、(17)和式(18)、(19)、(20)、(21)；运用的物理学方法主要有理想模型法、运动分解法、相对运动法、系统法.

4　结语

本文深入、细致地探究了一个看似简单的典型力学问题，不仅获得了此问题的尽可能完备的信息——速度、位移、加速度、作用力、功－能的特点，深化了对此问题的理性认识；而且讨论了解决此问题运用的主要物理学方法，从大学普通物理、中学基础物理两个层次讨论了此典型力学问题教学的可行的要点，从而为此问题的开放式教学奠定了坚实的物理理论基础. 本文不但提供了解决非匀变速直线运动问题的实例，而且可作为从大学普通物理看待中学基础物理问题的实例.

参 考 文 献

1　胡盘新，孙迺疆. 普通物理学(第 5 版)习题分析与解答. 北京：高等教育出版社，2003. 87～88
2　Kleppner D，Kolenkow R J. 力学引论. 宁远源，等译. 北京：人民教育出版社，1980. 236
3　漆安慎，杜婵英. 力学基础. 北京：高等教育出版社，1982. 195～196
4　谢宝田，周友明，冯麟保. 理论力学教程习题解. 北京：中国科学技术出版社，1991. 93～95
5　刘炳昇. 走进高中新课改：物理教师必读. 南京：南京师范大学出版社，2005. 151

Mechanical Question Research on the Ball Movement on the Arc-shape Slide

He Shuping
(Research Institute of Physics Education，College of Education，Northwest Normal University，Lanzhou，Gansu　730070)

Abstract：This paper delves into a typical mechanical problem，and particular deductions are given，the results show that velocity，displacement，acceleration，force of objects all vary with position angle parameter θ，a pair of internal forces work respectively，but their total work equals to zero；and necessary teaching discussion is made.

Key words：mechanical problem；characteristics；teaching research；method