

图像法处理打点纸带的研究

何述平

(西北师范大学教育学院物理教育研究所,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 图像法是物理实验数据处理的基本方法. 为了有效利用打点纸带的时空信息, 本文细致推证了处理打点纸带测定加速度、初速度的图像法. 结论表明, 有 12 种具体方法. 结合测量实例给出了运用图像法的基本一致的结果; 探讨了各图像法的特点、简捷程度; 比较了处理打点纸带的图像法与逐差法.

关键词: 图像法; 数据处理; 打点纸带; 匀变速直线运动

1 引言

打点纸带的数据处理是研究匀变速直线运动实验的基本而重要的内容, 也是打点计时器在中学物理实验应用的基本方法. 然而, 关于处理打点纸带的图像法, 以前虽有所论述;^[1-4] 但较零星、笼统, 有必要再进行较深入、系统的探究, 进而为合理处理打点纸带奠定层次性、开放性的理论基础. 本文就此进行相应的研究, 以期拓展处理打点纸带测定加速度、初速度的图像法, 提供实验数据处理的图像法依据, 并为打点计时器的实验教学设计奠定坚实的物理基础.

2 图像法的推证

纸带随物体做匀变速直线运动, 打点纸带的计数点为 n , 计数周期为 T , 连续计数点间的位移依次为 $s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$, 如图 1 所示.

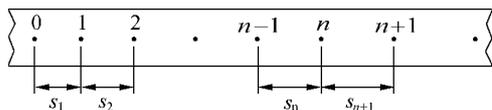


图 1

计数点 $n-1, n$ 间的位移为

$$s_n = [v_0 + (n-1)aT]T + \frac{1}{2}aT^2. \quad (1)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots, v_0$ 为 $n=0$ 时的瞬时速度.

计数点 n 的瞬时速度为

$$v_n = \frac{s_n + s_{n+1}}{2T}. \quad (2)$$

2.1 基本图像法

2.1.1 位移图像法

由式(1)得

$$s_n = s_0 + naT^2. \quad (3)$$

式中

$$s_0 = v_0T - \frac{1}{2}aT^2. \quad (4)$$

为恒量, 取决于实验条件、计数点的选取(物理意义为: $n=0$ 、前 T 内的位移).

依据式(3)有以下 3 种具体位移图像法.

2.1.1.1 $s-t$ 图像法

式(3)可改写为^[2]

$$s_n = s_0 + a_{s-t}T \cdot nT. \quad (5)$$

式(5)表明: s_n 与 nT 呈一次线性关系. 于是按图像法处理数据(nT, s_n), 就可确定加速度 a_{s-t} .

2.1.1.2 $s-n$ 图像法

式(3)可改写为^[2,3]

$$s_n = s_0 + a_{s-n}T^2 \cdot n. \quad (6)$$

式(6)表明: s_n 与 n 呈一次线性关系. 于是按图像法处理数据(n, s_n), 就可确定加速度 a_{s-n} .

2.1.1.3 $s-t^2$ 图像法

式(3)可改写为

$$s_n = s_0 + a_{s-t^2} \cdot nT^2. \quad (7)$$

式(7)表明: s_n 与 nT^2 呈一次线性关系. 于是按图像法处理数据(nT^2, s_n), 就可确定加速度 a_{s-t^2} .

另外, 分别由位移图像法确定的 $a_{s-t}, a_{s-n}, a_{s-t^2}$ 和 s_0 代入式(4), 就可确定初速度 v_0 .

2.1.2 速度图像法

依据对速度图像法的理解层次不同, 可进行分类: 从物理实验数据处理的形式上理解, 就是基本速度图像法; 从物理实验数据处理的实质上理解, 则是变形速度图像法.

(1) 基本速度图像法.

纸带做匀变速直线运动, 则有

$$v_n = v_0 + naT. \quad (8)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$ 依据式(8)有以下两种具体基本速度图像法.

(a) $v-t$ 图像法.

式(8)可改写为^[1-4]

$$v_n = v_0 + a_{v-t} \cdot nT. \quad (9)$$

式(9)表明: v_n 与 nT 呈一次线性关系. 图像法处理数据(nT, v_n), 就可确定加速度 a_{v-t} 、初速度 v_0 .

(b) $v-n$ 图像法.

式(8)可改写为

$$v_n = v_0 + a_{v-n}T \cdot n. \quad (10)$$

式(10)表明: v_n 与 n 呈一次线性关系. 图像法处理数据(n, v_n), 就可确定加速度 a_{v-n} 、初速度 v_0 .

(2) 变形速度图像法.

由式(2)知, 速度 v_n 并非实验的直接测量量, 有必要将其表示成实验的直接测量量——位移 s_n 、时间 T 的函数. 于是, 将式(2)代入式(8)得

$$s_n + s_{n+1} = 2v_0 T + 2naT^2. \quad (11)$$

依据式(11)有以下 3 种具体变形速度图像法.

(a) $s_v - t$ 图像法.

式(11)可改写为

$$s_n + s_{n+1} = 2v_0 T + a_{s_v-t} T \cdot 2nT. \quad (12)$$

式(12)表明, $s_n + s_{n+1}$ 与 $2nT$ 呈一次线性关系. 图像法处理数据 $(2nT, s_n + s_{n+1})$, 就可确定加速度 a_{s_v-t} 、初速度 v_0 .

(b) $s_v - n$ 图像法.

式(11)可改写为

$$s_n + s_{n+1} = 2v_0 T + a_{s_v-n} T^2 \cdot 2n. \quad (13)$$

式(13)表明: $s_n + s_{n+1}$ 与 $2n$ 呈一次线性关系. 图像法处理数据 $(2n, s_n + s_{n+1})$, 就可确定加速度 a_{s_v-n} 、初速度 v_0 .

(c) $s_v - t^2$ 图像法.

式(11)可改写为

$$s_n + s_{n+1} = 2v_0 T + a_{s_v-t^2} \cdot 2nT^2. \quad (14)$$

式(14)表明: $s_n + s_{n+1}$ 与 $2nT^2$ 呈一次线性关系. 图像法处理数据 $(2nT^2, s_n + s_{n+1})$, 就可确定加速度 $a_{s_v-t^2}$ 、初速度 v_0 .

2.2 奇异图像法

从不同角度或侧面考虑同一问题, 也许是有益的; 这形成了处理打点纸带的奇异图像法.

2.2.1 中时速度图像法

纸带做匀变速直线运动, 则有

$$v_n' = v_0' + naT \quad (15)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$, v_0' 为 $n=0$ 时的瞬时速度 (n 想象为比图 1 中计数点超前 $\frac{T}{2}$); 而

$$v_n' = \frac{s_n}{T} \quad (16)$$

为图 1 中计数点 $n-1, n$ 间, $\frac{T}{2}$ 时的瞬时速度^[3,4].

2.2.1.1 基本中时速度图像法

式(15)可分别改写为

$$v_n' = v_0' + a_{v'-t} \cdot nT, \quad (17)$$

$$v_n' = v_0' + a_{v'-n} T \cdot n. \quad (18)$$

由式(17)、(18)分别按图像法处理数据 (nT, v_n') 、 (n, v_n') , 可确定加速度 $a_{v'-t}$ 、 $a_{v'-n}$ 和 v_0' .

另外, 由匀变速直线运动的速度规律, 有

$$v_0 = v_0' + a \frac{T}{2}. \quad (19)$$

由式(19)、图像法确定的 $a_{v'-t}$ 、 $a_{v'-n}$ 和 v_0' 可确定初速度 v_0 .

2.2.1.2 变形中时速度图像法

式(16)代入式(15), 得

$$s_n = v_0' T + naT^2. \quad (20)$$

式(19)代入式(20), 得式(3)、(4); 进而有式(5)、(6)、(7), 即有位移图像法的结果. 可谓殊途同归.

2.2.2 线性化图像法

参照图 1, 纸带做匀变速直线运动, 则有

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = v_0(nT) + \frac{1}{2}a(nT)^2. \quad (21)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$, v_0 为 $n=0$ 时的瞬时速度.

将式(21)线性化^[5], 得

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{nT} = v_0 + \frac{1}{2}a \cdot nT. \quad (22)$$

由式(22)则有如下两种具体线性化图像法.

(a) $\frac{s}{t} - t$ 图像法.

式(22)表明: $\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{nT}$ 与 nT 呈一次线性关系.

图像法处理数据 $(nT, \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{nT})$, 可确定加速度 $a_{\frac{s}{t}-t}$ 、初速度 v_0 .

(b) $\frac{s}{t} - n$ 图像法.

式(22)可改写为

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{nT} = v_0 + \frac{1}{2}aT \cdot n. \quad (23)$$

式(23)表明: $\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{nT}$ 与 n 呈一次线性关系. 图像法处理数据 $(n, \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{nT})$, 可确定加速度 $a_{\frac{s}{t}-n}$ 、初速度 v_0 .

3 图像法的分类

图像法具有直观、简便的特点,^[5,6]因此在物理实验数据处理中有重要运用; 但随着作图工具的发展, 图像法也不断发展; 依据目前作图工具, 图像法可分为人工图像法和机工图像法. 就物理实验教学而言, 人工图像法即手工作图, 简称为作图图像法, 因手工作图不可避免地存在一定的作图误差,^[5]从而有一定运用(如分析物理量间关系, 粗略求物理量值); 机工图像法即计算机作图图像法, 是回归法与计算机的计算、图像功能相结合的方法, 计算机有现成的 Excel 程序能自动完成数据处理, 不仅可获得线性函数的回归法图像, 而且可获得线性函数的回归法表达式,^[6]从而有广泛运用(如拟合物理量间关系, 精确求物理量值, 定量确定标准差, 预报与反预报), 由此形成了可简称为回归图像法.

幸运的是, 上述推证的 12 种图像法中的因变量与自变量均呈一次函数关系; 因此可直接进行直线回归或拟合, 即可直接运用回归图像法处理打点纸带数据.

4 图像法的运用及结果

取测定北京地区重力加速度($g_{\text{北京}} = 980.12 \text{ cm/s}^2$)的打点纸带数据($T=0.04 \text{ s}$)^[3], 如表 1 (v_n, v_n' 分别由式(2)、(16)算得); 则依次运用上述推证的回归图像法(Excel 程序: 选定 $(x_i, y_i) \rightarrow$ 插入 \rightarrow 图表 \rightarrow 标准类型 \rightarrow XY 散点图 \rightarrow 平滑线散点图 \rightarrow 完成; 右击平滑图线 \rightarrow 添加趋势线 \rightarrow 类型 \rightarrow 线性 \rightarrow 选项 \rightarrow 显示公式 \rightarrow 确定)处理打点纸带测定加速度、初速度的结果如表 1.

表 1

计数点 n	位移 s_n cm	速度 v_n cm/s	速度 v_n' cm/s
1	2.27	76.25	56.75
2	3.83	114.88	95.75

续表

计数点 n	位移 s_n cm	速度 v_n cm/s	速度 v_n' cm/s
3	5.36	153.62	134.00
4	6.93	193.00	173.25
5	8.51	232.50	212.75
6	10.09	/	252.25

4.1 位移图像法的结果

(1) 由式(5)、表1相应数据得 $s-t$ 图像、表达式,如图2;进而得: $g_{s-t} = 976.98 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.89 \text{ cm/s}$.

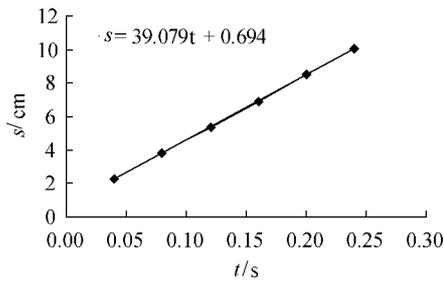


图2

(2) 由式(6)、表1相应数据得 $s-n$ 图像、表达式,如图3;进而得: $g_{s-n} = 976.88 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.89 \text{ cm/s}$.

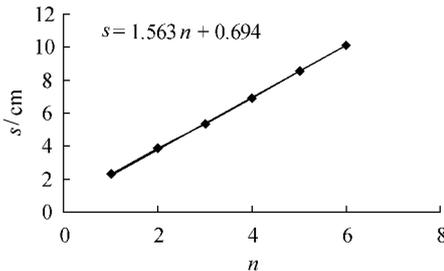


图3

(3) 由式(7)、表1相应数据得 $s-t^2$ 图像、表达式,如图4;进而得: $g_{s-t^2} = 976.96 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.89 \text{ cm/s}$.

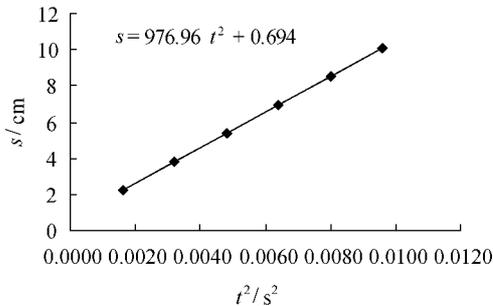


图4

4.2 速度图像法的结果

4.2.1 基本速度图像法的结果

(1) 由式(9)、表1相应数据得 $v-t$ 图像、表达式,如图5;进而得: $g_{v-t} = 976.55 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.86 \text{ cm/s}$.

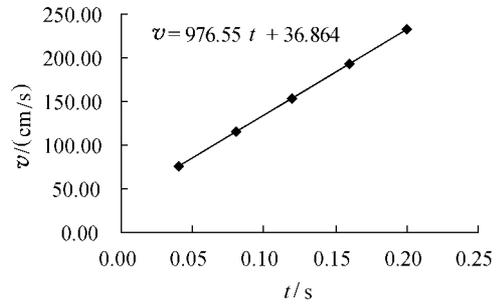


图5

(2) 由式(10)、表1相应数据得 $v-n$ 图像、表达式,如图6;进而得: $g_{v-n} = 976.55 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.86 \text{ cm/s}$.

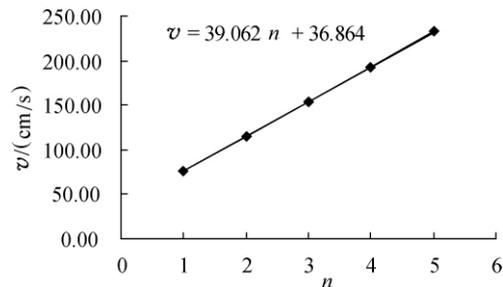


图6

4.2.2 变形速度图像法的结果

(1) 由式(12)、表1相应数据得 s_v-t 图像、表达式,如图7;进而得: $g_{s_v-t} = 976.58 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.86 \text{ cm/s}$.

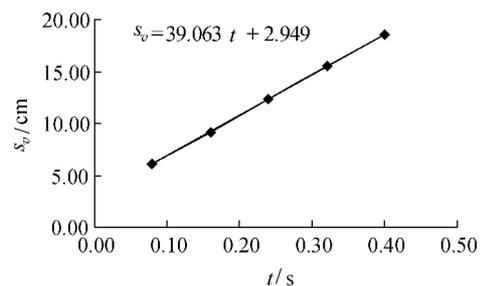


图7

(2) 由式(13)、表1相应数据得 s_v-n 图像、表达式,如图8;进而得: $g_{s_v-n} = 976.56 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.86 \text{ cm/s}$.

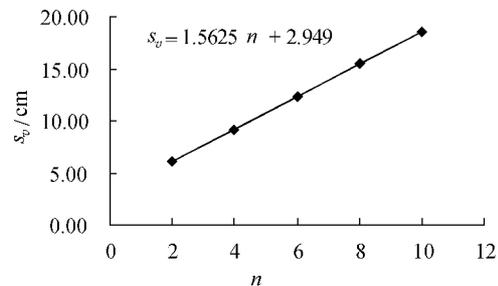


图8

(3) 由式(14)、表1相应数据得 s_v-t^2 图像、表达式,如图9;进而得: $g_{s_v-t^2} = 976.56 \text{ cm/s}^2, v_0 = 36.86 \text{ cm/s}$.

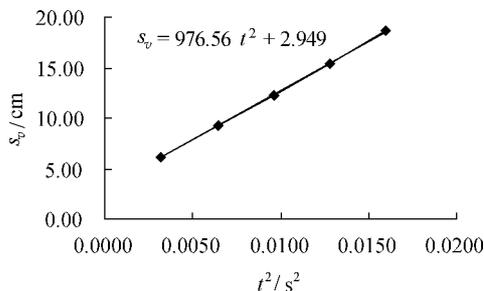


图 9

4.3 中时速度图像法的结果

(1) 由式(17)和表 1 中相应数据得 $v'-t$ 图像、表达式,如图 10;进而得: $g_{v'-t} = 976.96 \text{ cm/s}^2$, $v_0 = 36.89 \text{ cm/s}$.

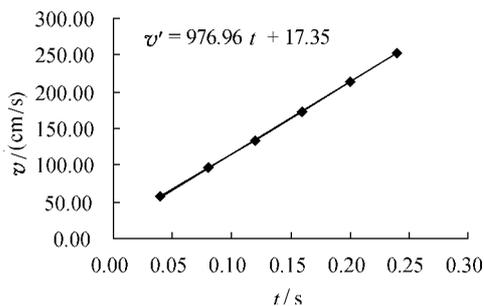


图 10

(2) 由式(18)和表 1 中相应数据得 $v'-n$ 图像、表达式,如图 11;进而得 $g_{v'-n} = 976.98 \text{ cm/s}^2$, $v_0 = 36.89 \text{ cm/s}$.

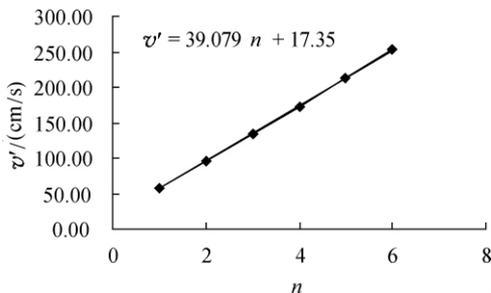


图 11

4.4 线性化图像法的结果

(1) 由式(22)、表 1 中相应数据得 $\frac{s}{t}-t$ 图像、表达式,如图 12;进而得 $g_{\frac{s}{t}-t} = 972.92 \text{ cm/s}^2$, $v_0 = 37.24 \text{ cm/s}$.

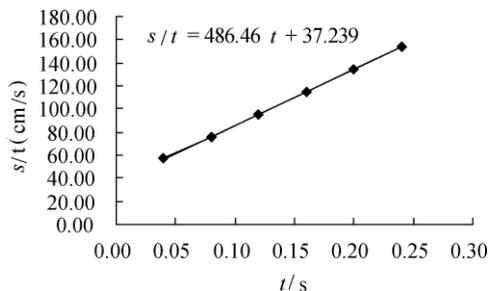


图 12

(2) 由式(23)、表 1 中相应数据得 $\frac{s}{t}-n$ 图像、表达式,如图 13;进而得 $g_{\frac{s}{t}-n} = 972.90 \text{ cm/s}^2$, $v_0 = 37.24 \text{ cm/s}$.

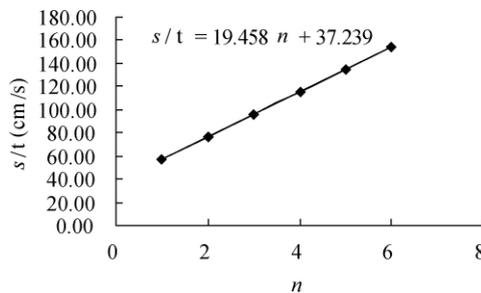


图 13

上述 12 种图像法处理打点纸带数据的结果表明:12 种图像法的结果基本一致(重力加速度的相对误差依次为 0.32%, 0.33%, 0.32%; 0.36%, 0.36%; 0.36%, 0.36%, 0.36%; 0.32%, 0.32%; 0.73%, 0.74%);因摩擦、空气阻力,则实验测定值 $g_{\text{实测}}$ 应比公认标准值 $g_{\text{北京}}$ 偏小.因此,各图像法的结果具有合理性;进而说明各图像法具有合理性、可行性.

5 图像法的讨论

5.1 特点比较

位移图像法的式(3)、基本速度图像法的式(8)、变形速度图像法的式(11)、基本中时速度图像法的式(15)、变形中时速度图像法的式(20)、线性化图像法的式(22)不仅物理意义明确(式(22)表明:时段 nT 的平均速度即中间时刻 $\frac{nT}{2}$ 的瞬时速度 $\frac{s_1+s_2+\dots+s_n}{nT}$,等于初速度 v_0 加上半时段的速度增量 $a \cdot \frac{nT}{2}$;则其物理实质是匀变速直线运动的速度变化规律),而且可以互推(如由式(3)、(4)可推得式(11),由式(11)、(4)可推得式(3);由式(3)、(4)可推得式(8),由式(8)、(4)可推得式(3)(参考图 1);由式(8)、(2)可推得式(11),由式(11)、(2)可推得式(8);由式(15)、(16)可推得式(20),由式(20)、(16)可推得式(15);由式(20)、(19)可推得式(3),由式(3)、(4)可推得式(20);由式(3)、(4)可推得式(22),由式(22)、(4)可推得式(3);由式(8)、(19)可推得式(15),由式(15)、(19)可推得式(8)等等);虽表达形式上不同,但物理实质等效(从不同侧面即位移、速度反映匀变速直线运动的特征——加速度恒定).

比较上述各图像法可知,图像法处理打点纸带测定加速度的简捷程度(由简到繁)依次为:位移图像法(因直接利用实验测定量的位移和时间,故位移图像法最简捷)、变形中时速度图像法、变形速度图像法、基本中时速度图像法、基本速度图像法、线性化图像法.因此,更宜采用位移图像法处理打点纸带测定加速度.这就为图像法的层次性、开放性实验教学奠定了坚实的物理理论基础.

5.2 图像法与逐差法的比较

图像法、逐差法均是拟合直线或曲线的方法,也是数据处理的基本方法.^[5]作图图像法的实质是粗略平均法,回归图像法的实质是数理统计法 (下转第 62 页)

则设一般解为

$$x_1 = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + C\sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (5)$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}C\sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (6)$$

将初始条件 $t=0$ 时, $x_1=0, x_2=0, \dot{x}_1=-v, \dot{x}_2=-v$ 代入上式, 求得

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, A = \frac{v(\sqrt{5}-5)}{10\omega_1}, C = \frac{-v(\sqrt{5}+5)}{10\omega_2}.$$

代入(5)式, 得

$$x_1 = \frac{v(\sqrt{5}-5)}{10\omega_1}\sin(\omega_1 t) - \frac{v(\sqrt{5}+5)}{10\omega_2}\sin(\omega_2 t), \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{(3\sqrt{5}-5)v}{10\omega_1}\sin(\omega_1 t) - \frac{(3\sqrt{5}+5)v}{10\omega_2}\sin(\omega_2 t). \quad (8)$$

x_1 的两个分量都是周期函数, x_1 开始时为 0, 经过一段时间, 再次为 0 时, 左边第一根弹簧由压缩状态恢复原长, 接下去 x_1 变为正值, 即弹簧将离开原点, 意味着碰撞结束, 算出此时物体的动能, 与初始动能比较, 就可以知道是否动能守恒。

对上述方程用天空软件站的图像绘制软件《冰竹之新数学函数 参数方程》按精确到小数点后 4 位求得

$t=5.2682\sqrt{m/k}$ 时, 第 2 次 $x_1=0$, 此时

$$\dot{x}_1=0, \dot{x}_2=1.057v,$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 = 1.91 \times \frac{1}{2}mv^2.$$

而初始动能是

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv^2.$$

笔者再次用上述软件按精确到小数点后 7 位重新计算, 得

$$E_k = 1.9104627 \times \frac{1}{2}mv^2.$$

可见以一个小球和一根弹簧联结而成的物体在对称碰撞后确实动能不守恒, 有一小部分动能(大约 4.5%, 即由 $\frac{E_{k0}-E_k}{E_{k0}} \times 100\%$ 算出)转化成弹性势能。

上面的精确计算表明, 一般弹性体碰撞结束后动能不守恒, 有一小部分动能转化为弹性势能, 所以不等于弹性碰撞。弹性碰撞是一种理想化的物理模型, 除了要求碰撞过程中相互作用的内力完全是由于形变引起的弹性力(保守力)外, 还要求碰撞物体刚度大(即变形小)、几何尺寸小, 从而碰撞时间短, 碰撞作用瞬时传到整个物体, 这样的宏观物体的碰撞才可近似地看作是弹性碰撞。真正的弹性碰撞, 只有在分子、原子以及更小的粒子之间才会遇到。

参考文献:

- 1 李增林等. 力学. 南京: 南京工学院出版社, 1988. 197—203
- 2 中山大学数学力学教研室. 力学教程. 北京: 高等教育出版社, 1978. 277—288

(收稿日期: 2012-04-12)

(上接第 60 页)

即最小二乘法; 逐差法的实质是差分一平均法。一般而言, 逐差法的处理结果比作图图像法的精确, 与回归图像法的相差不大;^[5] 或原则上, 逐差法的标准差比回归法的大。^[7] 因此, 对处理打点纸带测定加速度、初速度而言, 回归图像法最精确、逐差法次之、作图图像法最次。

虽然如此, 作图图像法仍不失为中学物理实验基本训练的数据处理方法, 逐差法是中学物理实验合理、实用的数据处理方法, 回归图像法可作为中学物理实验提高、开放的数据处理方法。

6 结语

本文拓展了处理打点纸带测定加速度、初速度的图像法; 从作图工具和物理实验教学探讨了图像法的分类, 提出了作图图像法和回归图像法; 提供了推证的 12 种回归图像法运用的一个典型实例; 比较了各图像法的特点、简捷程度; 讨论了作图图像法、逐差法、回归图像法的精确程度、中学物理实验的适用情形。

图像法不仅是物理实验的数据处理方法, 而且是物理实验的基本内容。因此, 本文的研究既可作为关于数据处理方法的高中物理课程资源, 又可作为物理学科学方法教育的显性方法的内容, 是高中物理教师深入认识、教学设计打点计时器实验的物理基础; 同时体现了高中物理课程内容理念的基础性、选择性、时代性(回归图像法作为回归

法与计算机的计算、图像功能相结合的方法在高中物理教科书^[8]中业已呈现), 高中物理课程实施理念的多样性, 并突出了开放性。可以预见, 通过本文推证的处理打点纸带测定加速度、初速度的图像法的探究式教学, 可很好地培养物理实验的数据处理方法, 可更好地理解匀变速直线运动的规律, 进而提升物理实验的数据处理能力。

参考文献:

- 1 许国梁, 束炳如. 中学物理教学法(第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 1993. 358
- 2 陶洪. 物理实验论. 南宁: 广西教育出版社, 1996. 185, 188
- 3 王兴乃, 罗栋国. 高中物理实验大全(第 1 册). 北京: 电子工业出版社, 1989. 166—167, 179—181, 186—188
- 4 安忠, 刘炳升. 中学物理实验教学研究. 北京: 高等教育出版社, 1986. 185—187
- 5 龚镇雄. 普通物理实验中的数据处理的. 西安: 西北电讯工程学院出版社, 1985. 88—89, 80—82, 95—96, 122, 132
- 6 朱鹤年. 基础物理实验教程: 物理测量的数据处理与实验设计. 北京: 高等教育出版社, 2003. 59—60, 68—69
- 7 朱鹤年. 新概念物理实验测量引论: 数据分析与不确定度评定基础. 北京: 高等教育出版社, 2007. 80
- 8 人民教育出版社课程教材研究所, 物理课程教材研究开发中心. 普通高中课程标准实验教科书·物理 1(第 2 版). 北京: 人民教育出版社, 2006. 32

(收稿日期: 2012-05-13)