热水最多能给牛奶传递多少热量

郎　和　　葛洋洋

(西北师范大学教育学院　甘肃 兰州　730070)

1　问题的提出

有这样一道有趣的题目:有 0 ℃ 的袋装牛奶 1 kg、60 ℃ 的热水 1 kg,① 将牛奶直接放入热水中加热,热平衡后牛奶的温度是多少?② 将热水均分为 2 份,依次对牛奶进行加热:先将牛奶放入第一份热水中,达到热平衡后取出牛奶,紧接着放入第二份热水中,达到热平衡后,牛奶的温度是多少?(设牛奶和水的比热容都为 $C = 4.2\times10^{3}$ J/(kg·℃),不计牛奶和水的热量损失)

有的人第一感觉是:问题 ① 和问题 ② 的答案应该相同. 但实际上不同. 下面给出其解.

对问题 ①,设热平衡后牛奶的温度为 t,

由　　　$Q_{放} = Q_{吸}$,

得　　　$1\times C\times(t-0) = 1\times C\times(60-t)$,

解得 $t = 30$ ℃. 即牛奶直接放进热水,温度可达到 30 ℃.

对问题 ②,假设牛奶放入第一份热水中,热平衡后牛奶的温度为 t_1,取出牛奶再放入第二份热水中,热平衡后牛奶的温度为 t_2,由 $Q_{放} = Q_{吸}$ 得

$$1\times C\times(t_1-0) = \frac{1}{2}\times C\times(60-t_1),$$

$$1\times C\times(t_2-t_1) = \frac{1}{2}\times C\times(60-t_2).$$

解得　　$t_2 = \frac{100}{3}$ ℃ ≈ 33.33 ℃.

即将热水分成两份,牛奶温度可达 33.33 ℃.

比较问题 ① 和 ② 的结果可知,将热水均分为两份依次对牛奶进行加热,牛奶可获得较多热量.

一些喜欢思考的学生会提出这样的问题:若不计热量损失,① 热水被均分成的份数越多,牛奶所能达到的温度就越高吗?② 牛奶的最高温度可达到多少?③ 热水最多能给牛奶传递多少热量?

2　问题的分析与解决

不计热量损失,上述问题可以推广到任意两个比热容确定、温度不等的物体. 两物体的质量、比热容和初始温度如表 1 所示.

表 1

	质量(kg)	比热容(J/kg·℃)	初温(℃)
高温物	m_a	C_a	t_a
低温物	m_b	C_b	t_b

高温物体被分成 N 份,每一份的质量为$\frac{m_a}{N}$. 先用第一份高温物体与低温物体 m_b 接触,热平衡后隔离 m_b,m_b 的温度为 t_1;再用第二份高温物体与 m_b 接触,热平衡后隔离 m_b,m_b 的温度为 t_2;…… 直至第 N 份高温物体与 m_b 接触,热平衡后 m_b 的温度为 t_N.

探究的问题是:t_N 是否随 N 的增大而增大?低温物体 m_b 的最高温度能达到多少?高温物体最多能给低温物体传递多少热量?

解析　第 $k(k\leqslant N)$ 份高温物体与低温物体 m_b 达到热平衡时,设 m_b 的温度为 t_k,根据 $Q_{放} = Q_{吸}$,得

$$\frac{m_a}{N}C_a(t_a-t_k) = m_bC_b(t_k-t_{k-1}).\tag{1}$$

为方便计算,对(1) 式作如下处理:

令$\frac{m_bC_b}{m_aC_a} = \lambda$. 设 $t_a - t_b = \Delta t$,设 $t_b = 0$,则 $t_a = \Delta t$.(之所以设 $t_b = 0$,是因为 0 ℃ 是人为规定的,两物体间传递多少热量与温差有关,而与 0 ℃ 的规定无关. 设 $t_b = 0$,可以使计算简化)

则(1) 式可变为

$$t_k = \frac{\Delta t + N\lambda t_{k-1}}{1+N\lambda}.\tag{2}$$

当 $k = 1$,得

$$t_1 = \left(1-\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)\Delta t.\tag{3}$$

[(3) ~ (8) 式的详细推导过程见附录]

当 $k = 2$,得

$$t_2 = \left[1-\left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^2\right]\Delta t.\tag{4}$$

当 $k = 3$,得

$$t_3 = \left[1-\left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^3\right]\Delta t.\tag{5}$$

观察(3)、(4)、(5) 式,可猜想

$$t_k = \left[1-\left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^k\right]\Delta t.\tag{6}$$

利用(2) 式,应用数学归纳法可以证明(6) 式成立.

则第 N 次加热完成后,低温物体 m_b 的温度为:

$$t_N = \left[1-\left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^N\right]\Delta t.$$

因为之前设 $t_a - t_b = \Delta t$,且设 $t_b = 0$,所以此时低温物体的实际温度 $t_N{}'$ 为

$$\begin{aligned} t_N{}' &= t_b + t_N \\ &= t_B + \Delta t - \left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^N\Delta t \\ &= t_a - \left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^N(t_a-t_b). \end{aligned}\tag{7}$$

(7) 式即为高温物体所均分成的份数 N 与低温物体最后所能达到温度 $t_N{}'$ 的函数关系.

设(7) 式是以 $N(N>0)$ 为变量的连续函数,对(7) 式求导得

$$\frac{dt_N{}'}{dN} = -(t_a-t_b)\left(\frac{N\lambda}{1+N\lambda}\right)^N\frac{N\lambda}{(1+N\lambda)^2}\ln\frac{N\lambda}{1+N\lambda} > 0.$$

可见,$t_N{}'$随着 N 的增大而增大. 即高温物 m_a 被均分的份

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

数 N 越大,最后低温物 m_b 能达到的温度越高.

以 N 为变量,对(7)式求极限得

$$\lim_{N\to\infty} t_N{}' = t_a - e^{-\frac{1}{\lambda}}(t_a - t_b). \tag{8}$$

低温物体所能达到的最高温度可由(8)式求得.

高温物体最多能给低温物体传递的热量为

$$Q_{\max} = m_b C_b \Delta t = m_b C_b(\lim_{N\to\infty} t_N{}' - t_b). \tag{9}$$

将(8)式应用于上述例题,牛奶所能达到的极限温度

$$\lim_{N\to\infty} t_N = (60 - 60e^{-1})\ ℃ \approx 37.92\ ℃.$$

将(9)式应用于上述例题,热水最多能给牛奶传递的热量为

$$Q_{\max} = m_b C_b \Delta t = 4.2 \times 10^3 \times (37.92 - 0)\ \mathrm{J} \approx 1.59 \times 10^5\ \mathrm{J}.$$

至此,上述问题均已解决.

3 对热量传递增多原因的探讨

如图1所示,高温物体 m_a 与低温物体 m_b 接触,Δm 是 m_a 的一部分. Δm 向 m_b 传递热量而降温,之后,Δm 从 m_a 的其它部分吸收热量,向 m_b 传递热量. 物体达到热平衡后,Δm 实际上给 m_b 贡献的热量为 $\Delta Q = \Delta m C_a(t_a - t_{平衡})$. 式中 Δm、C_a、t_a 的值确定,$t_{平衡}$ 越小,ΔQ 就越大. 若只有 Δm 而无 m_a 的其它部分给 m_b 传热,则 $t_{平衡}$ 较小. 所以,移去 m_a 的其它部分,只剩下 Δm,利于 Δm 所贡献热量 ΔQ 的增大. 同样的道理,只有 Δm 与 m_b 接触时,将 Δm 中离 m_b 相对较远的的一部分移去,更利于剩下部分的热量充分传递. 这就是说,所取的 Δm 越小,越能充分传递其热量. m_a 中每一小部分的热量都能充分传递,最后 m_a 总体上传给 m_b 的热量就比两物体直接接触所传递的热量多.

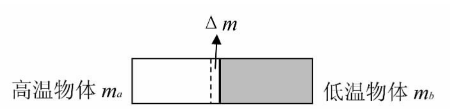

图1

4 进一步思考

上文研究了不计热量损失、高温物体(热水)可分、低温物体(牛奶)不可分的特定情况. 如果高温物体与低温物体都可分,采用类似本文的这种“均分、分步加热”方法,预计可使低温物体获得更多热量. 那么,这种情况下,高温物体能给低温物体传递多少热量呢?热切盼望同仁们能够给出这个问题的解答.

附录 (文中部分式子的详细推导过程)

1.(3)式的推导过程:

由(2)式,即

$$t_k = \frac{\Delta t + N\lambda t_{k-1}}{1 + N\lambda},$$

当 $k = 1$,则 $t_0 = t_b = 0$,

$$t_1 = \frac{\Delta t}{1 + N\lambda} = \frac{1 + N\lambda - N\lambda}{1 + N\lambda}\Delta t = \left(1 - \frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)\Delta t.$$

2.(4)式的推导过程:

由(2)式,即

$$t_k = \frac{\Delta t + N\lambda t_{k-1}}{1 + N\lambda},$$

当 $k = 2$,

$$t_2 = \frac{\Delta t + N\lambda t_1}{1 + N\lambda}\ (将\ t_1 = \frac{\Delta t}{1 + N\lambda}\ 代入)$$

$$= \frac{1 + 2N\lambda}{(1 + N\lambda)^2}\Delta t = \frac{1 + 2N\lambda + (N\lambda)^2 - (N\lambda)^2}{(1 + N\lambda)^2}\Delta t$$

$$= \frac{(1 + N\lambda)^2 - (N\lambda)^2}{(1 + N\lambda)^2}\Delta t = \left[1 - \left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^2\right]\Delta t.$$

3.(5)式的推导过程:

由(2)式,即

$$t_k = \frac{\Delta t + N\lambda t_{k-1}}{1 + N\lambda},$$

当 $k = 3$,

$$k_3 = \frac{\Delta t + N\lambda t_2}{1 + N\lambda}\ (将\ t_2 = \frac{1 + 2N\lambda}{(1 + N\lambda)^2}\Delta t\ 代入)$$

$$= \frac{1 + 3N\lambda + 3(N\lambda)^2}{(1 + N\lambda)^3}\Delta t$$

$$= \frac{1 + 3N\lambda + 3(N\lambda)^2 + (N\lambda)^3 - (N\lambda)^3}{(1 + N\lambda)^3}\Delta t$$

$$= \frac{(1 + N\lambda)^3 - (N\lambda)^3}{(1 + N\lambda)^3}\Delta t$$

$$= \left[1 - \left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^3\right]\Delta t.$$

4. 用数学归纳法证明(6)式成立的过程:

假设(6)式,即 $t_k = \left[1 - \left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^k\right]\Delta t$ 成立.

由(2)式,即 $t_k = \frac{\Delta t + N\lambda k_{k-1}}{1 + N\lambda}$ 得

$$t_{k+1} = \frac{\Delta t + N\lambda t_k}{1 + N\lambda}.$$

将(6)式代入上式得

$$t_{k+1} = \frac{\Delta t + N\lambda\left[1 - \left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^k\right]\Delta t}{1 + N\lambda}$$

$$= \frac{\left[1 + N\lambda - \frac{(N\lambda)^{k+1}}{(1 + N\lambda)^k}\right]\Delta t}{1 + N\lambda}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^{k+1}\right]\Delta t.$$

所以,(6)成立.

5. 判断(7)式导数大于零的过程:

因为 $\lambda = \frac{m_b c_b}{m_a c_a} > 0$,$N > 0$,

所以

$$\left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^N > 0,$$

$$\frac{N\lambda}{(1 + N\lambda)^2} > 0,$$

$$\ln\frac{N\lambda}{1 + N\lambda} < 0.$$

又因为

$$t_a > t_b,$$

所以

$$\frac{dt_N{}'}{dN} = -(t_a - t_b)\left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^N \frac{N\lambda}{(1 + N\lambda)^2}\ln\frac{N\lambda}{1 + N\lambda} > 0.$$

6.(7)式演变到(8)式的过程:

由

$$\left(\frac{N\lambda}{1 + N\lambda}\right)^N = \left(\frac{1 + N\lambda}{N\lambda}\right)^{-N} = \left(\frac{1 + N\lambda}{N\lambda}\right)^{N\lambda\frac{-1}{\lambda}},$$

再由

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1 + N}{N}\right)^N = e,$$

得

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1 + N\lambda}{N\lambda}\right)^{n\lambda\frac{-1}{\lambda}} = e^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net