

数学教师专业发展的根基之一——数学知识

——从两道测试题引发的思考

●西北师范大学教育学院 张定强 蔡娟娥

一、引言

数学教育对社会的进步、科技的发展都起着十分重要的作用。而数学教师的专业发展水平是决定数学教育质量的关键因素，教师的专业发展有三个维度，专业理念与师德、专业知识、专业能力^[1]这三个维度共同建构着教师的专业素质，支撑着教师的教学。为了全面了解数学教师的专业发展水平，笔者利用研讨、培训等机会，采用碎片化的方式，用零星的时间从不同的角度对数学教师的数学知识水平进行了测试，以求全面探查数学教师所掌握的数学学科知识，重点从分析问题、解决问题的视角进行调研，其中一次的测试、调研结果并不乐观，出现的问题令人担忧，引人思考。作为一位数学教师不仅需要具有良好的师德师风、高超的教学技巧，而且需要有坚实的数学知识及获取数学知识的方法技巧。这样才能有力量、有信心去从事数学教育工作。

二、数学测试及结果分析

本测试有两道小题。第一道是关于代数方面的问题，第二道是关于概率方面的问题。共有63名中小学数学教师参加了测试，其中小学数学教师8名、初中数

学教师42名、高中数学教师13名。本科学历者60名，专科学历者3名。有32名是正在攻读硕士学位的在职教师。

测试题1：有两个袋子，白袋里装着2000粒白豆，红袋里装着3000粒红豆。您从白袋里拿出50粒放进红袋里。您再把红袋里的豆子搅匀，然后，眼睛不看，就那么从红袋里拿出50粒放进白袋。接着您又重复这个步骤，但这回是从白袋里拿出100粒放进红袋里，搅拌均匀后再从红袋里拿出100粒放进白袋。第三遍重复时，每次拿出150粒。问题是这样的：到最后，红袋里的白豆比白袋里的红豆是多还是少？^[1]请给出您的理由。

这道题主要是测试一线数学教师分析问题和解决问题的能力，所涉及的数学知识并不多。

测试中出现如下三种结果。

结果1：红袋里的白豆与白袋里的红豆一样多。

得出此结果者有15人，占测试教师的23.8%。

回答理由有两种：

其一是：按比例算（10人，3名小学数学教师），即

白豆的比例是 $\frac{2000}{2000+3000} = \frac{2}{5}$ ，红豆的比例是

$\frac{3000}{2000+3000} = \frac{3}{5}$ ，那么，白袋里的红豆就有 $2000 \times \frac{3}{5} =$

学，注重思维的训练应该放在重要的位置。唯有在数学课堂教学和解题训练中注意数学思想的立意追求，才能将学生的眼前利益和长远利益较好地兼顾起来，实现数学育人的高远追求。

参考文献：

1. 刘东升.“并列”式问题与“递进”式求解——由一

则解题教学案例说起[J]. 中学数学教学参考(中), 2012(8).

2. 郑毓信.“数学思想”面面观[J]. 中学数学教学参考(中), 2012(8-10).

3. 章建跃. 发挥数学的内在力量, 为学生谋取长期利益[J]. 数学通报, 2013(2).

4. 林崇德. 智力发展与数学学习[M]. 北京: 中国轻工业出版社, 2011. [1]



1200(粒),红袋里的白豆就有 $3000 \times \frac{2}{5} = 1200$ (粒),所以红袋里的白豆与白袋里的红豆一样多。

其二是:用概率算(5人,其中4名高中数学教师)。根据题意,分三次算两个袋里的不同颜色豆子的概率,越算越乱,算来算去,回答是感觉一样多。

结果2:白袋里的红豆比红袋里的白豆多。

得出此结果者有32人,占测试教师的50.8%。

回答理由也有两种:

其一是:红袋里的红豆基数大,所以最后放进白袋里的红豆多(有28名教师表达了这种意思,其中初中数学教师24名)。

其二是:红袋中的红豆从量上看多,概率大,那么放进白袋里的概率一定大(有4名数学教师这样认为)。

结果3:红袋里的白豆比白袋里的红豆多。

得出此结果者有16人,占测试教师的25.4%。

回答理由大多是凭感觉,先从白袋里取白豆放进红袋里,而红袋里的粒数多,基数大,所以红袋里的白豆要比白袋里的红豆多。

仔细阅读测试卷及测试后的教师说法,发现许多数学教师基本上没有解决这个问题的明晰思路,大多数靠直觉给出了答案,缺少推证过程。一看到“搅匀”、“多少”,就想到是关于概率或比例方面的试题,受比例、概率固有思路的束缚,用这种模式一套却混乱不清,得不出答案。问题出在教师受固有思维的束缚,缺乏仔细审题的意识,就想套用已有的解题模式,结果碰上了困难,不敢创新思维,理不清头绪。

测试题1的分析与思考:

思路1:把复杂的问题简单化,即特殊值法。

题目中问的是经过三次放进拿出后的结果如何,可先分析经过一次操作后,并且只拿一粒白豆的情况,这样问题就简单了。从白袋里拿一粒白豆,放进红袋里,把红袋里的豆子搅拌均匀以后,再从红袋里拿出一粒豆子放进白袋里去,无非出现两种情况:红的或白的。如果这粒豆子是红的,显然,那粒白豆仍在红袋里,这时,白袋里有一粒红豆,而红袋里就有一粒白豆,相等;如果这粒豆子是白的,红袋里就没有白豆,白袋里也没有红豆,量上也相等。这样,红袋里的白豆与白袋里的红豆是一样多的。

这种特例法给予方法论的启示:首先要弄清题意,把问题做些修改,从简单、特殊的情况入手,探寻

解决问题的思路,这种方法也是数学上分析问题、解决问题的主要方法之一。

思路2:一般化分析。

设在第一次操作中,从白袋里拿出 m 粒白豆子放进红袋里,然后搅拌均匀后再从红袋里拿出同样多的 m 粒豆子放回白袋里,这时可做这样的分析:由于第一次操作中从白袋里拿出的全是白豆的 m 粒豆子,而从红袋里拿出的 m 粒豆子放进白袋里的豆子既有白豆也有红豆,不妨设白豆为 b_1 粒,红豆为 h_1 粒,且 $b_1 + h_1 = m$,这时白袋里就有 h_1 粒红豆,而红袋里的白豆就有 $m - b_1$,显然其差为 h_1 ,这样第一次操作结束后,红袋里的白豆与白袋里的红豆都是 h_1 ,一样多。将 m 换成50就是测试题中的问题。

对第二次操作,可做类似的分析:由于第一次操作结束后,红袋里的白豆与白袋里的红豆是一样多的,不妨设同为 y 。这时从白袋里拿出 m_2 粒豆子放进红袋里,这时 m_2 粒豆子中既有白豆也有红豆,不妨设 $b_2 + h_2 = m_2$ (其中 b_2 为白豆、 h_2 为红豆),然后在搅拌均匀后再从红袋里拿出同样多的 m_2 粒豆子放回白袋里,设放回的 m_2 粒豆子中有白豆 b_2' ,红豆 h_2' ,那么 $b_2' + h_2' = m_2$,这时白袋里的红豆为 $y - h_2 + h_2'$,而红袋里的白豆为 $y + b_2 - b_2'$ 。由于 $b_2 + h_2 = b_2' + h_2'$,所以 $y - h_2 + h_2' = y + b_2 - b_2'$ 。因此,红袋里的白豆与白袋里的红豆还是一样多的。

现在很清楚了,不论再进行多少次的操作,也不论取多少数量,在上述条件下,结论总是相同的。

这道测试题的解决所用的知识并不多,关键是有没有灵活的思维方式,在用少量的数学知识可以解决一个问题的时候,为什么好多一线教师束手无策,不得让我们深思。数学教师尚且不能灵活、开放地解决问题,受其影响和培养的学生也就不可避免带有思维僵化的痕迹。因此,在数学教师的专业发展中,绝不能忽视对数学知识的学习与应用,把创新精神的培植作为教师专业发展的启动点,点点滴滴强化数学素养,开放数学思维。

测试题2:1991年1月21,美国《游行》杂志的M.塞望小姐主持的专栏中刊登了这样一道题目:有三扇门(编号为1、2、3),其中有一扇门的后面是一辆汽车,另两扇门的后面则各有一只羊。你可以猜一次,猜中羊可以牵走羊,猜中汽车则开走汽车。当然大家都希望能开走汽车。

现在假如你猜了某扇门的后面是车(例如1号

门) ,然后主持人把无车的一扇门打开(例如3号门). 此时,请问:你是否要换2号门?^[2]

你选择的是换还是不换,为什么?

这道测试题是考查数学教师对概率试题的分析和思考.

测试结果也出现了三种答案.

答案1:不换.

给出此答案的数学教师有35人,占测试教师的55.6%.

回答的理由有两种.

理由一是(有18名,其中有15名初中数学教师):之所以不换是因为刚开始时,三扇门后有羊的概率是 $\frac{2}{3}$,有车的概率是 $\frac{1}{3}$,猜中后,主持人打开了无车的一扇门,这时有车与羊的概率就都成为 $\frac{1}{2}$,机会均等,所以不换.

理由二是(有17名,其中有15名初中数学教师):因为刚开始每扇门后有羊、有车的概率都是 $\frac{1}{3}$,打开门后有羊、有车的概率都是 $\frac{1}{2}$,是相等的,选择定了以后,它们的可能性大小是不变的,所以不用换.

答案2:换.

给出此答案的有12人(高中数学教师4名、小学数学教师2名、初中数学教师6名),占测试教师的19.05%.

回答的理由有三种.

理由一是:如果不换,猜中车的概率是 $\frac{1}{3}$,而换了猜中车的概率是 $\frac{2}{3}$,并用图表法分析,所以选择换.

理由二是:如果换了,那么 $P_{\text{换}} = \frac{2}{3}$, $P_{\text{不换}} = \frac{1}{2}$,换了以后的概率大,所以换.

理由三是:原来车在1号门后的概率是 $\frac{1}{3}$,而打开门后,车在2号门的概率是 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 比 $\frac{1}{3}$ 大,所以应当换.

答案3:换与不换都可以.

回答此结论的有16人(其中小学数学教师居多),占测试教师的25.4%.

理由是:刚开始时每扇门后有羊、有车的概率是

$\frac{1}{3}$ 、打开一扇门后每扇门后有羊、有车的概率是 $\frac{1}{2}$,前后概率都是一样的,无所谓换与不换.

测试题2的分析与思考:

正确思考的第一步是对题意进行分析,本游戏的关键是主持人知道车在哪扇门的后面,而且他总是会打开一个藏匿羊的那扇门.

现在假定参赛者起初选择了1号门.其实三扇门后面放车与羊(设C代表车、Y代表羊)的可能结果有如下三种情况:

门			概率
1号门	2号门	3号门	
C	Y	Y	$\frac{1}{3}$
Y	C	Y	$\frac{1}{3}$
Y	Y	C	$\frac{1}{3}$

首先,我们假定参赛者决定不换门.如果车和羊如第一行所示,那么他会赢得车.然而,如果车和羊如另外两种情况,他得到的将是羊,他获胜的可能性就是三分之一.

现在我们假定他总是决定换猜另一扇门,如果车和羊如第一行所示,那么无论主持人打开含有羊的哪扇门,参赛者总是获得一只羊,所以换门使他输了游戏,但是如果按第二行所示,那么主持人将打开3号门,更换门将使他获得车,同样,如果车和羊按最后一行所示,主持人打开2号门,他换选3号门,同样获得车,对于三种情况中的两种,参赛者将获胜,所以他获胜的概率是 $\frac{2}{3}$,恰好是他选择不换门的两倍.

因为所有的门是等价的,所以我们选定的门是1、2、3都无所谓,得到的结果与参赛者最初选择的是哪扇门没有关系.

对于这一问题,张先生还引用了一个很好的故事说明人们的选择.哈佛大学的概率教授迪康尼斯通过做实验来与观众分享这一问题,说明换与不换的道理.

三、几点思考

测试的结果如此,必须引起数学教育工作者的高度重视,数学教师在解决问题的过程中出现如此之多



的问题,关键是数学素养有一定的欠缺.如何强化数学教师对数学本体知识的掌握、理解、深化,特别是问题解决能力的提升就至关重要.从测试中反映出数学知识及其分析与解决问题方面的欠缺,那么在日常学习中、教研活动中、培训中必须树立数学知识是教师从教之本的理念,利用一切时间来提升自己的数学素养.

1. 数学知识是数学教师专业发展中的核心不容忽视

随着课改进入深水区,需要数学教师具备过硬的实力去应对挑战,专业理念与师德是应对挑战的软实力,而专业知识与专业能力则是应对挑战的硬实力,正如同车之双轮,鸟之双翼,如果没有过硬的数学知识,就根本无法胜任教师工作.现在有一种现象,就是教小学的数学教师,知识水平就是小学水平,教中学的数学教师,知识水平就是中学水平.这种不正常的现象已严重影响了数学教育的发展,需要从根本上加以纠正.居高才能临下、登高才能望远,数学知识是一个整体的体系,中小学数学知识体系与大学数学知识体系是紧密相连的,不能用静态的观点去认知这个体系,必须深刻地理解和掌握这个体系所涉及的核心概念、重要思想、关键方法,这样才能有力量去分析和解决所教学段碰到的问题.因此,在数学教师专业发展中要强化数学知识系统性的学习,有目标地制订数学知识水平提升计划,每天抽出一个小时进行数学专业知识学习,在参阅数学专业书籍、数学教育期刊的过程中强化数学理论修养,以代数主线、几何主线、概率主线、函数主线、应用主线等为突破口,认真钻研,掌握其核心理论体系,使其在一个新的平台上理解和把握所教数学知识的本质与核心.

2. 数学知识是提升数学教学质量的关键不能动摇

数学教学质量的一个决定要素是数学教师,而数学教师具备过硬的数学知识,准确有效的分析和解决一些数学问题就是关键.为此,数学教师要以高度的责任感整体规划自己的职业生涯,把数学知识的学习与提升置于首要地位.紧扣所教内容体系,博览相关专业书籍,以免误解所教内容的一些概念、原理,树立在教学过程中提升数学专业素养的意识.笔者在与一线教师研讨中,好多教师对有理数与无理数之间的辩证关系理解不深,就连自然数与有理数两个集合中的基数谁多谁少也无法正确回答,可见在教学过程中强

化数学素养对正确有效的教学是多么的重要.数学教师必须以正确地理解数学知识作为教学的必要条件,这样才能真正把数学的真谛言传身教给学生.那么通过最近发展原理,就所教代数、几何、统计等方面的内容以主线式、问题式或概念式等进行专业进修就十分必要,从不同的方面拓展理解与掌握的深度,特别是要从观念上剔除自己的知识水平足以应对所教年级数学的想法,从更高层面要求自己,不断地反思自己对所教概念、原理、方法掌握的程度,自我追查、自我分析,在准确把握和应用所教数学知识的基础上,更加接地气地进行数学案例分析与研讨,有针对性地进行教学变革与创新,从而全面提高数学教学质量.

3. 数学知识是数学教师从教之根的信念不容质疑

数学教师的根本职责是把人类创造的数学知识传授给学生,因此拥有渊博的数学知识就是从教之本,要把这个信念贯穿从教始终.为此要把学习数学、研究数学、发展数学、应用数学作为提升专业发展的途径.不仅要学习、研究如何有效地把数学知识传递给学生,而且要更加深入地挖掘数学知识体系中所蕴藏的思想与方法,尽可能用通俗易懂的语言、方法去进行分析与挖掘.这就需要广泛地阅读相关数学专业书籍,如赵小平编写的《现代数学大观》、张顺燕主编的《数学的源与流》、张奠宙主编的《数学方法论稿》等,以便深入地分析所教知识的来龙去脉,养成勤于思考、刻苦钻研的习惯,利用一切手段,检索相关知识、挖掘蕴藏思想,拓展认知疆域.同时还要认真阅读数学教育期刊,如《数学教育学报》、《数学通报》、《中学数学》、《中学数学月刊》等,真正担当起从教之责,让数学教学达到一种和谐与完美的状态,不仅能够有效地分析与解决从教中所碰到的一些数学问题,而且能够成为数学的发现者、研究者,在教学中进行方法示范、问题深化、思维拓展,有效实现数学教育目标.

参考文献:

1. 中华人民共和国教育部. 中学教师专业标准(试行). 2012.
2. [西]米盖尔·德·古斯曼,著. 数学探奇[M]. 周克希,译. 上海:上海教育出版社,1993.
3. 张奠宙. 大千世界的随机现象[M]. 南宁:广西教育出版社,1999. 